第7章　多元函数微分学及应用

基础知识与规律总结

7.1　多元函数、极限和连续

一、多元函数的概念

1. 邻域、区域

(1) 邻域.

以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，任意 $\delta>0$ 为半径的圆内的所有点 (x,y) 构成的集合

$$\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$.

以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，任意 $\delta>0$ 为半径的圆内不包含中心 $P_0(x_0,y_0)$ 的所有点 (x,y) 构成的集合

$$\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 空心邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

(2) 区域.

无界区域：可伸展到无限远处的区域，如 $\{(x,y)\mid-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$.

有界区域：总可以被包围在一个以原点为中心、半径适当大的圆内的区域.

如 $\{(x,y)\mid a<x<b,c<y<d\}$.

开区域：不包括任何边界点的区域，如 $\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$.

闭区域：包括全部边界点在内的区域，如 $\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\leqslant\delta\}$.

我们主要介绍二元函数的概念、性质和定理，二元以上函数的概念和性质可类推.

2. 二元函数的概念

设有三个变量 x,y,z，如果对于变量 x,y 的变化范围 D 内每一对数值，按照一定的法则，变量 z 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 z 为变量 x,y 的二元函数，记为

$$z=f(x,y).$$

其中，x,y 为自变量，z 为因变量，f 为对应关系或对应法则，D 为定义域.

注 ① 与一元函数一样，二元和二元以上的函数也只与定义域和对应法则有关，而与用什么字母表示自变量和因变量无关. 这个特性也常用来求二元函数的表达式.

② 多元函数的定义域，即自变量 x,y 的取值范围，和一元函数的定义域类似，若函数是用解析式表示的，则定义域是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合；若是根据实

际问题建立的函数的定义域，则定义域就是具有实际意义的实自变量值的集合.

3. 二元函数的几何意义

二元函数的定义域是平面上点的集合，是一个平面区域；二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形通常为一个空间曲面.

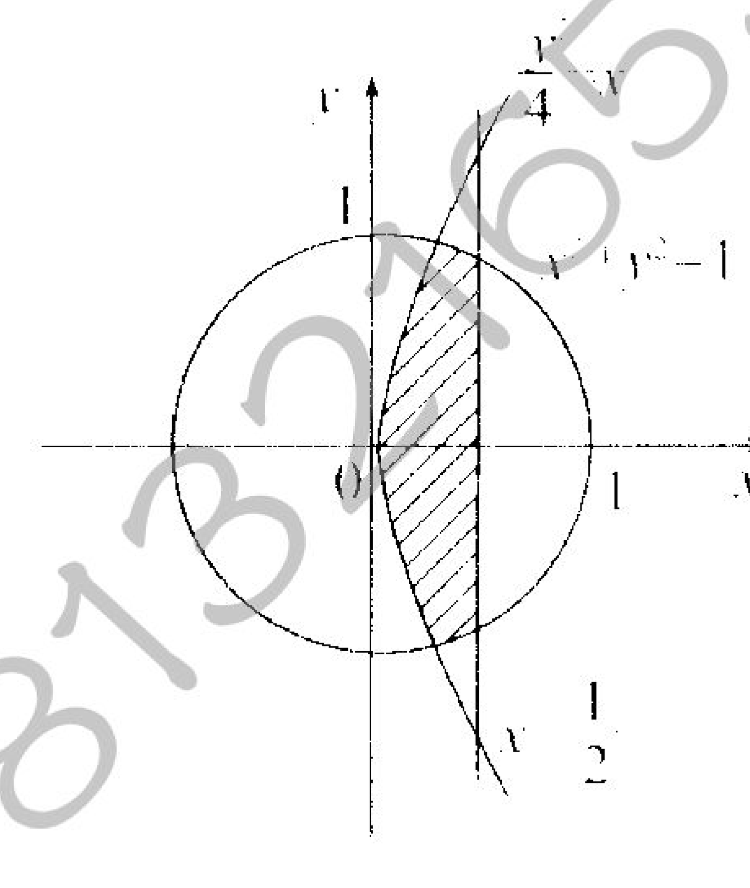


图 7-1

【例 7.1】 求函数 $z=\arcsin(2x)+\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域.

【解】 要使函数有定义，自变量必须满足：

$$\begin{cases}|2x|\leqslant 1\\4x-y^2\geqslant 0\\1-x^2-y^2>0\\1-x^2-y^2\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\y^2\leqslant 4x\\0<x^2+y^2<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\0<x^2+y^2<1\end{cases}.$$

所求函数的定义域如图 7-1 所示.

【例 7.2】 设二元函数 $f\left(\dfrac{x}{y},\sqrt{xy}\right)=\dfrac{x^3-2xy^2\sqrt{xy}+3xy^4}{y^3}$，求 $f(x,y)$，$f\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{2}{y}\right)$.

【解】 $f\left(\dfrac{x}{y},\sqrt{xy}\right)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^3-2\dfrac{x}{y}\sqrt{xy}+3(\sqrt{xy})^2$，令 $u=\dfrac{x}{y}$，$v=\sqrt{xy}$，则

$$f(u,v)=u^3-2uv+3v^2.$$

根据函数表示的无关特性可得

$$f(x,y)=x^3-2xy+3y^2.$$

令 $u=\dfrac{1}{x}$，$v=\dfrac{2}{y}$，直接代入可得

$$f\left(\frac{1}{x},\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{x^3}-\frac{4}{xy}+\frac{12}{y^2}.$$

二、二元函数的极限和连续

1. 二元函数 $z=f(x,y)$ 的极限

如果动点 $Q(x,y)$ 以任何方式无限趋于 $P(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 总是无限趋于一个常数 A，则称当 (x,y) 趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

注 ① 动点 $Q(x,y)$ 趋向 $P(x_0,y_0)$ 的方向、路径及方式是随意的. 若要否定 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 存在，通常是找两条不同的路径，求极限. 若极限不同，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在.

② 一元函数极限和二元函数极限的不同：

一元函数极限存在的充分必要条件是左右极限存在且相等（即 x 沿 x 轴的不同方向趋于 x_0 时，$f(x)$ 有相同的极限 A，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$）.

对二元函数 $z=f(x,y)$，即使点 $P(x,y)$ 沿任何直线方向趋于点 $P(x_0,y_0)$ 时的极限都相等，也不能断定 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 存在.

③ 二元函数的极限运算法则和一元函数相同.

2. 计算二元函数极限

(1) 求二元函数极限时,设法转化为一元函数的极限;

(2) 通过观察,若能大致估计所求极限不存在,可选两条不同路径,求出不同的极限值,从而证明原极限不存在.

【例 7.3】 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$;

【解】 (1) 因为 $\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$,且当 $x\to 0,y\to 0$ 时,y 为无穷小量,

所以,当 $x\to 0,y\to 0$ 时,$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot y$ 为无穷小量,即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$,

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y}=1$,$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2y}{x^2}\right|=|y|\to 0\ (y\to 0)$,

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$.

【例 7.4】 证明下列极限不存在.

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$.

【解】 (1) 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 依赖于 k,即 k 不同时,极限值不同,

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

(2) 令 $y=x$,则

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{x^4+x^5+x^3}{2x}=0;$$

令 $y=x^3-x$,则

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^3-x}}\frac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x^3-x}}\frac{x^3(x^3-x)+x(x^3-x)^4+x^2(x^3-x)}{x+(x^3-x)}=-1.$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$ 不存在.

3. 二元函数的连续

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的邻域内有定义,分别给 x,y 以增量 $\Delta x,\Delta y$,相应地得到函数增量 Δz,若 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$,则称 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点连续,(x_0,y_0) 称为 $z=f(x,y)$ 的连续点.

定义 2 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点处满足条件:

① 在 $P(x_0,y_0)$ 点处 $z=f(x,y)$ 有定义;

② $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 存在；

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，

则称 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点连续.

注 ① 定义1和定义2是等价的；

② 若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 的每一点都连续，则称 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上连续.

③ 多元初等函数，即用一个式子表示的多元函数，这个式子是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算得到的，如 $z=\sin(x+y)$，$z=e^{x^2+y^2}$，$z=\dfrac{1-xy+y^2}{1+x^2}$ 等多元初等函数在其定义区域内是连续的.

④ 一元函数仅有间断点可言，而二元函数不仅可能有间断点，还可能有间断线，三元函数还可能出现间断面.

【例 7.5】 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在(0,0)处的连续性.

【解】 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{|xy|}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，

所以 $f(x,y)$ 在(0,0)点连续.

4. 有界闭区域上二元函数连续的性质

(1) 若函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则函数 $z=f(x,y)$ 在此闭区域上有界，且能取得它的最大值和最小值.

(2) 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

7.2 二元函数偏导数、全微分

一、偏导数

一元函数的导数表示函数关于自变量的变化率. 多元函数关于其中一个自变量的变化率为该函数对于该自变量的偏导数. 以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例，如果只有自变量 x 变化，而自变量 y 固定(看做常量)，这时二元函数就是 x 的一元函数，这个函数对 x 的导数，就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导数.

1. 一阶偏导数

函数 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点处有定义，则 z 对 x 在 $P(x_0,y_0)$ 点处的偏导数定义为：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P=z'_x(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

注1 上式中 y_0 是固定的.

类似，z 对 y 在 $P(x_0,y_0)$ 点处的偏导数定义为：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P = z'_y(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0)$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

注2 该式中 x_0 是固定的.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x,y 的函数，它就称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z'_x,f'_x(x,y).$$

求解时将 y 看做固定不变的.

类似地，可定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z'_y,f'_y(x,y).$$

求解时将 x 看做固定不变的.

偏导数的概念可推广到二元以上的函数. 如 $u=f(x,y,z)$ 对变量求偏导时，也是只把求导变量当做变量，其他变量当做常数. 如求 $f'_x(x,y,z)$ 时，将 y,z 当做常数，而将 $u=f(x,y,z)$ 仅当做 x 的一元函数，利用一元函数的求导公式和导数的运算法则计算.

注3 分段函数在分界点处的偏导数用定义求.

2. 偏导数的几何意义

按照偏导数的定义易知：$f'_x(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在空间点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处切线 T_x 的斜率；$f'_y(x_0,y_0)$ 表示曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在空间点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处切线 T_y 的斜率. 如图 7-2 所示.

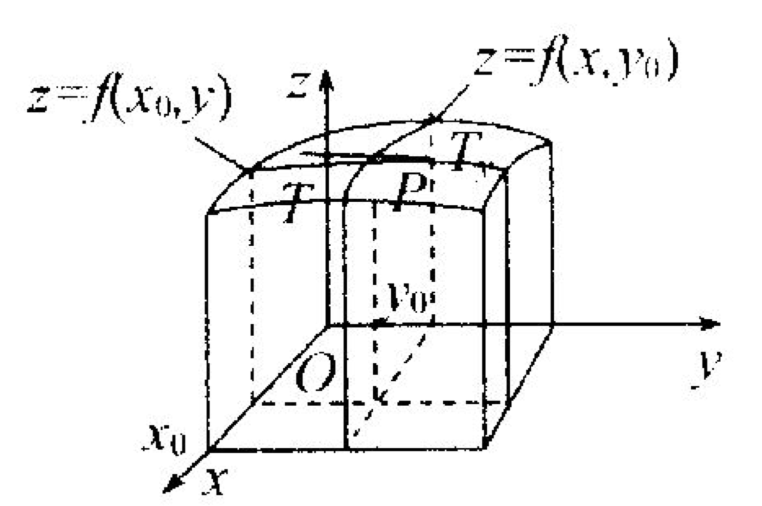


图 7-2

3. 二阶偏导数

若 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ 对变量 x,y 的偏导数仍然存在，则称这些偏导数为 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，具体如下所述.

$z=f(x,y)$ 对 x,y 的二阶偏导数，记为 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y)$，表示 $z=f(x,y)$ 先对 x 求偏导（y 当做常数），然后对 y 求偏导（此时 x 当做常数），其他符号类似；

$z=f(x,y)$ 对 y,x 的二阶偏导数，记为 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y)$；

$z=f(x,y)$ 对 x 的二阶偏导数，记为 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x,y)$；

$z=f(x,y)$ 对 y 的二阶偏导数，记为$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{y^2}(x,y)$.

注 前面两个偏导数称为对x,y的混合偏导数，一般讲，$f''_{xy}(x,y)\neq f''_{yx}(x,y)$，即$z=f(x,y)$对$x,y$的求导次序有关，只有二阶偏导数连续，其两个混合偏导数才相等，即二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关. 如，

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$，可求得 $f''_{xy}(0,0)=-1, f''_{yx}(0,0)=1$.

【例 7.6】设 $z=e^{x+y}\cos(y-x)$，求 z_x', z_y'.

【解】$z_x'=[e^{x+y}\cos(y-x)]'_x=e^{x+y}\cos(y-x)+e^{x+y}[-\sin(y-x)](-1)$

$=e^{x+y}[\cos(y-x)+\sin(y-x)]$;

$z_y'=[e^{x+y}\cos(y-x)]'_y=e^{x+y}\cos(y-x)+e^{x+y}[-\sin(y-x)]\cdot 1$

$=e^{x+y}[\cos(y-x)-\sin(y-x)]$.

【例 7.7】设 $z=x^y$，求二阶偏导数.

【解】$z_x'=(x^y)_x'=yx^{y-1}, z_y'=(x^y)_y'=x^y\ln x$.

$z_{xx}''=(z_x')_x'=(yx^{y-1})_x'=y(y-1)x^{y-2}$;

$z_{xy}''=(z_x')_y'=(yx^{y-1})_y'=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$;

$z_{yx}''=(z_y')_x'=(x^y\ln x)_x'=yx^{y-1}\ln x+x^y\frac{1}{x}=x^{y-1}(1+y\ln x)$;

$z_{yy}''=(z_y')_y'=(x^y\ln x)_y'=x^y\ln^2 x$.

【例 7.8】求 $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$(0,0)$处的偏导数.

【解】分段点的偏导数必须用定义求.

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0.$$

注 因为$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$不存在，所以该函数在点$(0,0)$不连续.

一元函数导数存在，可推得函数连续，但函数的偏导数存在，函数不一定连续. 因为偏导数存在只能保证点$P(x,y)$沿着坐标轴的方向趋于P_0时，函数值$f(P)$趋于$f(P_0)$，但不能保证点$P(x,y)$沿着任何方式趋于P_0时，函数值$f(P)$趋于$f(P_0)$.

4. 函数的偏导数与函数的连续的关系

函数的偏导数存在，函数不一定连续.

二、全微分

1. 概念

设函数$z=f(x,y)$在$P(x,y)$点的某邻域内有定义，在点$P(x,y)$处分别给x,y以增量$\Delta x,\Delta y$，相应地得到函数z的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$，若$\Delta z$可写成

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A、B 与 Δx、Δy 无关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，$o(\rho)$ 表示当 $\Delta x \to 0$，$\Delta y \to 0$ 时为 ρ 的高阶无穷小量，则称 $z = f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处可微，$A\Delta x + B\Delta y$ 称为 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的全微分，记为 $\mathrm{d}z$ 或 $\mathrm{d}f(x,y)$，即 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y$.

如果函数在区域 D 内各点处都可微分，则称该函数在 D 内可微分.

注 ① 当函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分时，函数在该点必定连续.

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)] = 0$，

所以 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x,y) + \Delta z] = f(x,y)$，

故函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 连续.

② 如何验证 $z = f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处可微？

只要验证 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\Delta z - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \overset{?}{=} 0$，

若等于 0，则可微；若不等于 0，则不可微.

【例 7.9】 设函数 $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$，

(1) 求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$；

(2) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？

【解】 (1) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$；

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

$$(2)\ \frac{\Delta z - [f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y]}{\rho} = \frac{\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

由前面的讨论知道 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 不存在，即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微.

2. 可微的必要条件

定理 1 当 $z = f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点处可微时，则该函数在点 $P(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，且函数 $z = f(x,y)$ 在 $P(x,y)$ 点的全微分为 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$，又 $\Delta x = \mathrm{d}x$，$\Delta y = \mathrm{d}y$，于是 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

注 可微可推得偏导存在，但偏导存在，不一定可微.

3. 全微分的计算

(1) 利用可微的必要条件，先求一阶偏导数，再求全微分；

(2) 利用全微分的四则运算法则；

(3) 利用一阶全微分形式不变性求全微分.

【例 7.10】设 $z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$ 可微，求 dz.

【解】先求一阶偏导数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

故 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=-\dfrac{y}{x^2+y^2}dx+\dfrac{x}{x^2+y^2}dy.$

【例 7.11】设 $z=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 可微，求 dz.

【解】$dz=\dfrac{(x^2+y^2)dx-xd(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{(x^2+y^2)dx-x(2xdx+2ydy)}{(x^2+y^2)^2}$

$$=\frac{(y^2-x^2)dx-2xydy}{(x^2+y^2)^2}.$$

4. 可微的充分条件

定理 2 如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在 $P(x,y)$ 点连续，则函数在该点可微.

注 可微推不出偏导数连续.

【例 7.12】设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases},$$

(1) 求 $f'_x(0,0),f'_y(0,0)$；

(2) $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续？

(3) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？

【解】(1) 用偏导数定义计算.

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{|x|}}{x}=0;$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\cos\frac{1}{|y|}}{y}=0.$$

(2) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f'_x(x,y)=2x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$f'_y(x,y)=2y\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

又 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}f'_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}|x|}+\dfrac{x}{\sqrt{1+k^2}|x|}\sin\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}|x|}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+k^2}\,|x|}\sin\frac{1}{\sqrt{1+k^2}\,|x|} \text{ 不存在.}$$

而由(1)中的分析知，$f'_x(0,0)=0$.

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_x(x,y) \neq f'_x(0,0)$，即 $f'_x(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续，同理可证 $f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

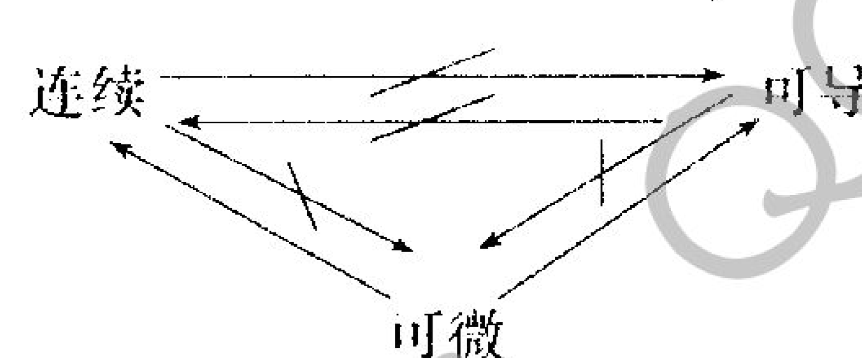
(3) $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$，

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0}\rho\cos\frac{1}{\rho} = 0.$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

注 此题说明，二元函数可微 $\nRightarrow$ 偏导连续.

5. 函数 $z = f(x,y)$ 连续、可导(指偏导数存在)、可微三者的关系



【例 7.13】 考虑二元函数 $z = f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续.

③$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微.

④$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用"$P\Rightarrow Q$"表示性质 P 可推出性质 Q，则有

(A)②⇒③⇒① (B)③⇒②⇒①

(C)③⇒④⇒① (D)③⇒①⇒④

【解】 因为两个偏导数连续 ⇒ 可微 ⇒ 连续，故选(A).

【例 7.14】 设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 存在，则

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

(C) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 都存在

(D) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在

【解】 根据偏导数定义，$f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 存在，即一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处可导，故可推出一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处连续且 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处连续，从而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$ 都存在，故选(C).

【例 7.15】 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充要条件是

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} [f(x,y) - f(0,0)] = 0$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$，且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$.

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$，且$\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$.

【解】 本题也可用排除法，(A) 是函数在(0,0)处连续的定义；(B) 是函数在(0,0)处偏导数存在的条件；(D) 说明一阶偏导数 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 存在，但不能推导出两个一阶偏导函数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 在点(0,0)处连续，所以(A)(B)(D)均不能保证 $f(x,y)$ 在点(0,0)处可微. 故应选(C).

事实上，

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ 可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+0^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2}}{x}=0，即 f'_x(0,0)=0.$$

同理有 $f'_y(0,0)=0$.

$$从而\lim_{\rho\to 0}\frac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-(f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

根据可微的判定条件可知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)处可微，故应选(C).

7.3 多元复合函数和隐函数微分法

一、多元复合函数微分法

多元复合函数求导法则的关键是弄清复合函数中哪些是中间变量，哪些是自变量. 为此变量之间的复合结构，常借助于树形图：将函数(因变量)、中间变量、自变量用线段连接，并依照以下法则：

(1) 单链是导数关系，多链是偏导数关系；

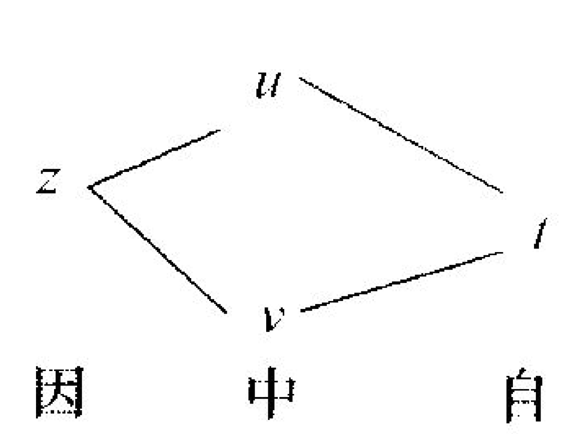
(2) 一条链之间，依次求偏导(或求导)相乘(即先对中间变量求偏导，然后再乘以中间变量对所求自变量的偏导(或导数))；

(3) 各条链之间，逐链相加.

以下为常见的三种情形.

1. 中间变量为一元函数的情形

设 $z=f(u,v)$，$u=\varphi(t)$，$v=\psi(t)$，f 具有一阶连续偏导，φ，ψ 可导，则求复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 对 t 的导数，树形图为：



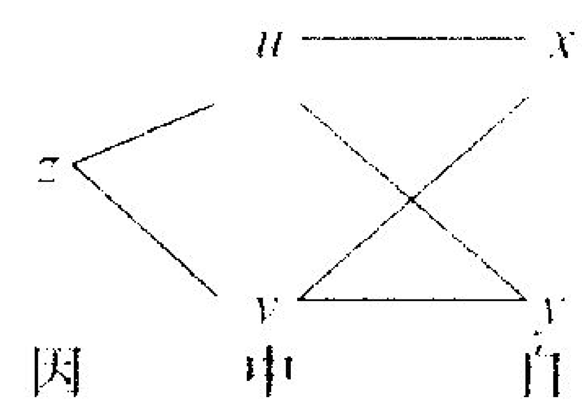
于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\varphi'(t)+\frac{\partial z}{\partial v}\psi'(t),$$

其中$\frac{dz}{dt}$称为全导数.

2. 中间变量为二元函数的情形

设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, f,φ,ψ 具有一阶连续偏导，则求复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 对 x,y 的偏导数，树形图为：

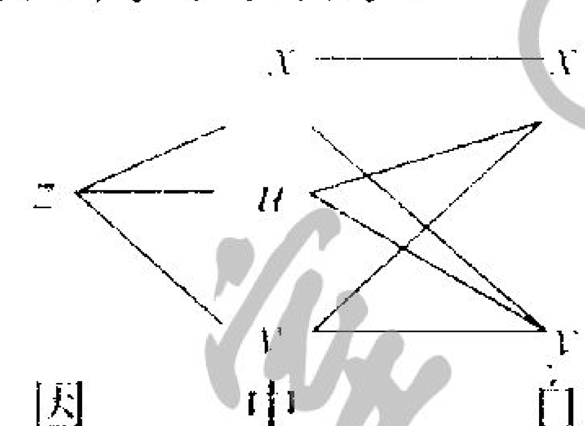


于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

3. 中间变量既有一元函数又有二元函数的情形

$z=f(x,u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, f,φ,ψ 均具有一阶连续偏导，则求复合函数 $z=f[x,\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 对 x,y 的偏导数，树形图为：



于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x\cdot 1+f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f'_x+f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+f'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_x\cdot 0+f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f'_u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f'_v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

注 ① 偏导数的结构：

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\text{或}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\text{的项数}=\text{中间变量的个数}.$$

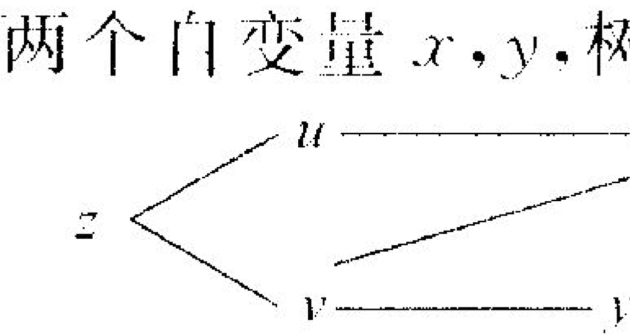
每一项是两个因子的乘积，第 1 个因子是因变量对中间变量的偏导数；第 2 个因子是中间变量对左边指定的自变量的偏导数(或导数).

② $\frac{\partial z}{\partial x}\left(\text{或}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$仍然是以 x,y 为自变量，以 u,v 为中间变量的函数，再求偏导数时，仍用情形 1、2、3 中的连锁法则.

③ 对抽象的复合函数求偏导前，一定要先引入中间变量，然后利用复合函数链式法则求偏导. 例如，$z=f(x^2+y^2,x\sin y)$，应设 $u=x^2+y^2$, $v=x\sin y$. 若要求的是高阶偏导数，则中间变量依次序用数字 1,2,3 等表示简便.

【例 7.16】设 $z=u\arctan(uv)$, $u=x^2$, $v=ye^x$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】本题中有两个中间变量 u,v，有两个自变量 x,y，树形图为：



则

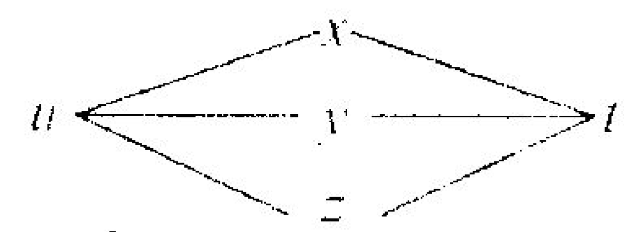
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\left[\frac{uv}{1+u^2v^2}+\arctan(uv)\right]\cdot 2x+\frac{u^2}{1+u^2v^2}\cdot ye^x$$

$$=\frac{u(2xv+ye^x)}{1+u^2v^2}+2x\arctan(uv);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{u^2}{1+u^2v^2}\cdot e^x=\frac{u^2e^x}{1+u^2v^2}.$$

【例 7.17】 设 $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$，$x=\sqrt{t}$，$y=\cos 2t$，$z=e^{-3t}$，求 $\frac{du}{dt}$.

【解】 本题只有一个自变量，树形图为：



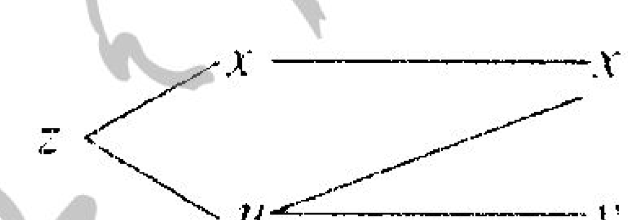
故 $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$

$$=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}+\left(-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z}\right)(-2\sin 2t)+\left(-\frac{y}{z^2}\right)(-3)e^{-3t}$$

$$=\frac{1}{2xy}+\left(\frac{2x}{y^2}-\frac{2}{z}\right)\sin 2t+\frac{3y}{z}.$$

【例 7.18】 设 $z=f(x,u)=x^2+u$，$u=\cos(xy)$，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial x}$.

【解】 本题中 x 既是自变量，又是中间变量，树形图为：



$\frac{\partial f}{\partial x}$ 的含义是指在函数 $z=f(x,u)$ 中，将中间变量 u 看做常量，对另一中间变量 x 求偏导数，故

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+u^2)}{\partial x}=2x;$$

而 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是在复合后的二元函数 $z=f(x,u)=x^2+\cos(xy)$ 中将 y 看做常量，对自变量 x 求偏导，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x,\cos(xy))}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2x+(-\sin(xy))y=2x-y\sin xy.$$

【例 7.19】 设 f 具有一阶连续偏导数，求下列函数的偏导数：

(1) $z=f(xy,x^2+y^2)$；　　(2) $u=f(x,xy,xyz)$.

【解】 (1) 令 $u=xy$，$v=x^2+y^2$，则 $z=f(u,v)$，由链式法则可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2x=y\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y=x\frac{\partial f}{\partial u}+2y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

(2) 令 $v=xy$，$w=xyz$，则 $u=f(x,v,w)$，由链式法则可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial v}+yz\frac{\partial f}{\partial w};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial v}+xz\frac{\partial f}{\partial w};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=xy\frac{\partial f}{\partial w}.$$

【例 7.20】 求函数 $z=f\left(x,\frac{y}{x}\right)$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，其中 f 具有二阶连续偏导数.

【解】 令 $v=\frac{y}{x}$，则 $z=f(x,v)$，由链式法则可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v}\right).$

而 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v},$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v}\right)=-\frac{2y}{x^3}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{y}{x^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right].$$

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial x}\right);$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

注 只有二阶偏导连续时，混合偏导数项才能合并.

4. 复合函数的全微分

设函数 $z=f(u,v)$ 具有连续偏导数，则有全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

如果 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 也具有连续偏导数，则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 的全微分为

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$. 此称为全微分形式不变性.

【例 7.21】 设 $z=e^{x+y}\cos(y-x)$，求 dz.

【解】 $dz=d(e^u\cos v)=e^u\cos v\,du-e^u\sin v\,dv,$

$du=d(x+y)=dx+dy,dv=d(y-x)=dy-dx,$

所以 $dz=e^{x+y}\cos(y-x)(dx+dy)-e^{x+y}\sin(y-x)(dy-dx)$

$\quad=e^{x+y}[\cos(y-x)+\sin(y-x)]dx+e^{x+y}[\cos(y-x)-\sin(y-x)]dy$

注 本题还可利用全微分不变性求解：

由例 7.6 可得

$z'_x=e^{x+y}[\cos(y-x)+\sin(y-x)],z'_y=e^{x+y}[\cos(y-x)-\sin(y-x)].$

于是有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$
$$=e^{x+y}[\cos(y-x)+\sin(y-x)]\mathrm{d}x+e^{x+y}[\cos(y-x)-\sin(y-x)]\mathrm{d}y.$$

二、多元隐函数微分法

1. 隐函数存在定理1(可确定一个因变量,一个自变量)

设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

【例 7.22】设方程 $xy^2+e^y=\cos(x^2+y^2)$，求 y'.

【解】$F(x,y)=xy^2+e^y-\cos(x^2+y^2)=0$，则

$$F'_x(x,y)=y^2+2x\sin(x^2+y^2),\ F'_y(x,y)=2xy+e^y+2y\sin(x^2+y^2),$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{y^2+2x\sin(x^2+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x^2+y^2)}$$

2. 隐函数存在定理2(可确定一个因变量,两个自变量)

设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

3. 方程组的情形，可确定两个因变量，一个自变量

由方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 只能确定一个自变量，两个因变量的函数. 若求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则 y,z 为因变量，x 为自变量.

4. 多元隐函数偏导的计算

关键是弄清哪些是自变量，哪些是因变量. 一阶偏导数的计算一般利用直接求导法、公式法或全微分法. 而对由方程组确定的隐函数，其一阶偏导数的计算，一般用直接求导法.

【例 7.23】设方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 确定了函数 $z=f(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【解】先求一阶偏导数.

方法一(直接法) 方程两边同时对 x 求偏导，这时将 y 看做常数，得

$$\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z},$$

同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$.

方法二(公式法)：原方程可写为：$F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=\frac{x}{z}-\ln z+\ln y=0$，

而
$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{z},\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{y},\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{x+z}{z^2},$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{z}{x+z};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

方法三（全微分法）方程两边微分，得

$$\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}=\mathrm{d}(\ln z-\ln y)=\frac{\mathrm{d}z}{z}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\Rightarrow \mathrm{d}z=\frac{z}{x+z}\mathrm{d}x+\frac{z^2}{y(x+z)}\mathrm{d}y,$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z};\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

下面求二阶混合偏导数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x+z}\right)=\frac{x}{(x+z)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz^2}{y(x+z)^3}.$$

【例 7.24】设 $x+y+z=\mathrm{e}^{xy}$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

【解】方程 $x+y+z=\mathrm{e}^{xy}$ 两边微分，得 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{xy}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$，

即 $\mathrm{d}z=(y\mathrm{e}^{xy}-1)\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^{xy}-1)\mathrm{d}y$，

故
$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\mathrm{e}^{xy}-1,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\mathrm{e}^{xy}.$$

因为方程关于 x,y 对称，所以$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\mathrm{e}^{xy}$.

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{xy}$.

注 当函数为对称形式或类对称形式时，可简化计算.

【例 7.25】求由方程组$\begin{cases}z=x^2+y^2\\x^2+2y^2+3z^2=20\end{cases}$所确定的隐函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

【解】方程组中的每个方程两边对 x 求导得

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\2x+4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\\4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{1+3z}\\\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}\end{cases}.$$

5. 多元隐函数的全微分

方法：一般是利用全微分的运算法则.

【例 7.26】设 $z=z(x,y)$ 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定，求 $\mathrm{d}z|_{P(1,0,-1)}$.

【解】对方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 两边取微分，得

$$yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0,$$

将 $P(1,0,-1)$ 代入上式，得

$$-\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}z}{\sqrt{2}}=0,$$

则
$$\mathrm{d}z\big| = \mathrm{d}x - \sqrt{2}\,\mathrm{d}y.$$

【例 7.27】设函数 $u = f(x,y,z)$ 有连续的偏导数，且 $z = z(x,y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$.

【解】对 $xe^x - ye^y = ze^z$ 两边微分，得
$$e^x\mathrm{d}x + xe^x\mathrm{d}x - e^y\mathrm{d}y - ye^y\mathrm{d}y = e^z\mathrm{d}z + ze^z\mathrm{d}z,$$
解得
$$\mathrm{d}z = \frac{1+x}{1+z}e^{x-z}\mathrm{d}x - \frac{1+y}{1+z}e^{y-z}\mathrm{d}y.$$
对 $u = f(x,y,z)$ 两边微分，得
$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= f'_x\mathrm{d}x + f'_y\mathrm{d}y + f'_z\mathrm{d}z \\ &= \left(f'_x + f'_z\frac{1+x}{1+z}e^{x-z}\right)\mathrm{d}x + \left(f'_y - f'_z\frac{1+y}{1+z}e^{y-z}\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

7.4 多元函数的极值、条件极值和最大值、最小值

一、基本概念和定理

定义 1 设函数 $z = f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点的邻域内有定义，$Q(x,y)$ 为该邻域内异于 $P(x_0,y_0)$ 的任一点，若恒有 $f(x,y) > f(x_0,y_0)$（或 $f(x,y) < f(x_0,y_0)$），则 $f(x_0,y_0)$ 称为 $z = f(x,y)$ 的极小值（或极大值），极大值和极小值统称为极值，使函数取极值的点为极值点.

定义 2 方程组 $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$ 的解 (x_0,y_0) 称为 $z = f(x,y)$ 的驻点，但不一定是极值点.

如，$(0,0)$ 是 $z = xy$ 的驻点，但 $z = xy$ 无极值.

定理 1 （取极值的必要条件） 设 $f(x_0,y_0)$ 为 $z = f(x,y)$ 的极值，又 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点存在（即 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 具有偏导数），则 $\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) = 0 \\ f'_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$

定理 2 **（取极值的充分条件）** 设函数 $z = f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 点的邻域内，具有二阶连续的偏导数，且 $\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) = 0 \\ f'_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$，$A = f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B = f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C = f''_{yy}(x_0,y_0)$，则

(1) 若 $B^2 - AC < 0$，当 $A > 0$（此时 $C > 0$）时，$f(x_0,y_0)$ 称为 $z = f(x,y)$ 的极小值；当 $A < 0$（此时 $C < 0$）时，$f(x_0,y_0)$ 称为 $z = f(x,y)$ 的极大值；

(2) 若 $B^2 - AC > 0$，$f(x_0,y_0)$ 不是 $z = f(x,y)$ 的极值；

(3) 若 $B^2 - AC = 0$，用配方法验证 $f(x_0,y_0)$ 是否为 $z = f(x,y)$ 的极值.

【例 7.28】设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数等于零.

(B) $f(x_0,y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数小于零.

(D) $f(x_0,y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数不存在.

【解】可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，根据取得极值的必要条件知 $f'_y(x_0,y_0) = 0$，即 $f(x_0,y)$ 在 $y = y_0$ 处的导数等于零，故选(A).

二、极值的求法

1. 无条件极值的求法

无条件极值是指函数自变量只受定义域约束的极值，一般利用二阶偏导数之间的关系和符号判断：

① 解方程组 $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$，求驻点，设为 (x_i,y_i)，$i=1,2,3,\cdots$；

② 用定理2判别；

③ 求出极值.

当定理2无法判别时用配方法.

【例 7.29】求函数 $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2-4xy+9y^2+3x-14y+\frac{1}{2}$ 的极值.

【解】解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=x-4y+3=0 \\ f'_y(x,y)=-4x+18y-14=0 \end{cases}.$$

得驻点 $(1,1)$.

再求二阶偏导数

$$f''_{xx}(x,y)=1,\ f''_{xy}(x,y)=-4,\ f''_{yy}(x,y)=18.$$

因此

$$A=f''_{xx}(1,1)=1,\ B=f''_{xy}(1,1)=-4,\ C=f''_{yy}(1,1)=18.$$

由于

$$B^2-AC=-2<0,\ A=1>0.$$

因此 $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处取得极小值，极小值 $f(1,1)=-5$.

2. 条件极值的求法

条件极值是指函数的自变量除受定义域约束外，还受其他条件限制的极值，求这类极值有两种方法：

① 化为无条件极值求解；

② 拉格朗日乘数法.

具体如下：

设目标函数为 $u=f(x,y,z)$，约束条件为 $\varphi(x,y,z)=0$，求极值.

方法一：化为无条件极值

① 由 $\varphi(x,y,z)=0$ 中解出 $z=z(x,y)$（不一定能解出）；

② 代入 $u=f(x,y,z)$ 中，得 $u=f(x,y,z(x,y))$；

③ 再按无条件极值求解.

方法二：拉格朗日乘数法

① 作辅助函数

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z).$$

② 解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

求出驻点(x_0,y_0,z_0).

（求驻点时，先将含λ的项移到右边，然后通过前三个方程得出x与y的关系式（或x与y,z的关系式），x与z的关系式（或x与y,z的关系式），最后将关系式代入$\varphi(x,y,z)=0$中解出x_0，y_0,z_0）.

③ 求出极值.

注 ① 当$f(x,y,z)$含有绝对值符号时，由拉格朗日乘数法所作的辅助函数为

$$F(x,y,z)=f^2(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z).$$

② 当目标函数$f(x,y,z)$比较复杂时，可取在相同的约束条件$\varphi(x,y,z)=0$下与$f(x,y,z)$具有相同驻点的简单形式$f_*(x,y,z)$，作辅助函数

$$F(x,y,z)=f_*(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z).$$

③ 当有两个约束条件$\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$时，相应地辅助函数设为

$$F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z),$$

然后解方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + \mu\psi'_x = 0 \\ F'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y + \mu\psi'_y = 0 \\ F'_z = f'_z + \lambda\varphi'_z + \mu\psi'_z = 0, \\ \varphi(x,y,z) = 0 \\ \psi(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

求出驻点(x_0,y_0,z_0).

【例 7.30】 求$V=xyz$在条件$x+y+z=1$下的极值.

【解】 作拉格朗日函数如下：

$$f(x,y,z)=xyz+\lambda(x+y+z-1).$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz+\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz+\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy+\lambda = 0 \\ x+y+z-1 = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \\ \lambda=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \\ \lambda=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \\ \lambda=0 \end{cases}, \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{1}{3} \\ \lambda=-\dfrac{1}{9} \end{cases}.$$

而由$x+y+z=1$可知，$z=1-x-y$，代入$V=xyz$得

$$V=xy(1-x-y)=xy-x^2y-xy^2.$$

$$A=V''_{xx}=-2y, B=V''_{xy}=1-2x-2y, C=V''_{yy}=-2x,$$

$$(B^2-AC)\big|_{(1,0)}=-1<0,\text{又 } C<0,$$

所以(1,0,0)和(0,1,0)为极大值点，极大值为0；

$(B^2-AC)|_{(0,0)}=1>0$，所以(0,0,1)不是极值点；

$(B^2-AC)|_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}=-\frac{1}{3}<0$，又 $A<0$，所以 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 是极大值点，极大值为 $\frac{1}{27}$.

3. 最值的求法

设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，则 $z=f(x,y)$ 在 D 上一定有最值，求法为：

(1) 求 $z=f(x,y)$ 在闭域 D 内的极值；

(2) 求 $z=f(x,y)$ 在 D 的边界线上的极值；

(3) 比较所得结果，最大者为最大值，最小者为最小值.

(4) 实际问题中的极值即为最值.

【例 7.31】 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

【解】(1) 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 的驻点.

因为 $\begin{cases} f'_x=2x-2xy^2=0 \\ f'_y=4y-2x^2y=0 \end{cases}$，所以 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}$，$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$（因为 $y\geqslant 0$，$y=-1$ 舍去）.

所以函数在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\}$ 内的驻点为 $(\sqrt{2},1)$，$(-\sqrt{2},1)$ 和 $(0,0)$.

(2) 求函数在边界线上的极值.

作拉格朗日函数如下

$$L(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4),$$

则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2x-2xy^2+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=4y-2x^2y+2\lambda y=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-4=0 \end{cases}，解之得 \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}，\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases}，\begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \end{cases}.$$

于是条件驻点为 $(\pm 2,0)$，$\left(\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$(0,2)$.

而

$$f(\pm\sqrt{2},0)=2, f\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{7}{4}, f(0,0)=0, f(0,2)=8, f(\pm 2,0)=4.$$

比较以上函数值，可得函数在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\}$ 上的最大值为8，最小值为0.

【例 7.32】 设在平面上有 $A(1,3)$，$B(4,2)$ 两点，C 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上位于第一象限上的一点，求三角形 ABC 面积的最值.

【分析】 设 C 点坐标为 $C(x,y)$，则三角形 ABC 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|x+3y-10|.$$

本题为求在约束条件$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$下$S_{\triangle ABC}$的最值，利用拉格朗日乘数法求解.

为求解方便可将目标函数$\frac{1}{2}|x+3y-10|$改为$(x+3y-10)^2$.

【解】令$F(x,y)=(x+3y-10)^2+\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)$.

解方程组

$$\begin{cases} F'_x=2(x+3y-10)+\frac{2}{9}\lambda x=0 \\ F'_y=6(x+3y-10)+\frac{1}{2}\lambda y=0 \\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases} \text{得 } x=\frac{3}{\sqrt{5}},y=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

则$S_{\triangle ABC}\Big|_{\left(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)}\approx 1.646$，而在边界点处，$S_{\triangle ABC}\Big|_{(0,2)}=2$，$S_{\triangle ABC}\Big|_{(3,0)}=\frac{7}{2}$.

故$\min S_{\triangle ABC}=1.646$，$\max S_{\triangle ABC}=\frac{7}{2}$.

7.5 空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线(数二不作要求)

一、空间曲线的切线和法平面

设空间曲线Γ的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t),t\in T. \\ z=z(t) \end{cases}$$

则曲线Γ在其上一点$P(x_0,y_0,z_0)$(对应的$t=t_0$)处的切线和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

【例 7.33】求曲线Γ:$\begin{cases} x=\int_0^t e^u\cos u\,du \\ y=2\sin t+\cos t \\ z=1+e^{3t} \end{cases}$在$t=0$处的切线和法平面方程.

【解】当$t=0$时，$x=0$，$y=1$，$z=2$.

且$x'(0)=(e^t\cos t)\big|_{t=0}=1$，$y'(0)=(2\cos t-\sin t)\big|_{t=0}=2$，$z'(0)=(3e^{3t})\big|_{t=0}=3$.

故曲线在$t=0$处的切线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}.$$

法平面方程为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-2)=0,\text{即 } x+2y+3z-9=0.$$

二、曲面的切平面和法线

(1)设曲面S为显式方程$z=f(x,y)$，则过S上一点$M(x_0,y_0,z_0)$的切平面与法线方程分

所以 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$ 为极大值点，极大值为 0；

$(B^2-AC)|_{(0,0)}=1>0$，所以 $(0,0,1)$ 不是极值点；

$(B^2-AC)|_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}=-\dfrac{1}{3}<0$，又 $A<0$，所以 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ 是极大值点，极大值为 $\dfrac{1}{27}$.

3. 最值的求法

设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，则 $z=f(x,y)$ 在 D 上一定有最值，求法为：

(1) 求 $z=f(x,y)$ 在闭域 D 内的极值；

(2) 求 $z=f(x,y)$ 在 D 的边界线上的极值；

(3) 比较所得结果，最大者为最大值，最小者为最小值.

(4) 实际问题中的极值即为最值.

【例 7.31】 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

【解】 (1) 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 的驻点.

因为 $\begin{cases} f'_x=2x-2xy^2=0 \\ f'_y=4y-2x^2y=0 \end{cases}$，所以 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}$，$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$（因为 $y\geqslant 0$，$y=-1$ 舍去）.

所以函数在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 内的驻点为 $(\sqrt{2},1)$，$(-\sqrt{2},1)$ 和 $(0,0)$.

(2) 求函数在边界线上的极值.

作拉格朗日函数如下

$$L(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4),$$

则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2x-2xy^2+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=4y-2x^2y+2\lambda y=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-4=0 \end{cases}，解之得 \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}，\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 2 \end{cases}，\begin{cases} x=\pm 2 \\ y=0 \end{cases}.$$

于是条件驻点为 $(\pm 2,0)$，$\left(\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$(0,2)$.

而

$$f(\pm\sqrt{2},0)=2,f\left(\pm\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\frac{7}{4},f(0,0)=0,f(0,2)=8,f(\pm 2,0)=4.$$

比较以上函数值，可得函数在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$ 上的最大值为 8，最小值为 0.

【例 7.32】 设在平面上有 $A(1,3)$，$B(4,2)$ 两点，C 为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上位于第一象限上的一点，求三角形 ABC 面积的最值.

【分析】 设 C 点坐标为 $C(x,y)$，则三角形 ABC 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|x+3y-10|.$$

A. 0.　　B. 不存在.　　C. -1.　　D. 1.　　【　】

6. 已知 $\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某个二元函数的全微分，则 $a=$

A. -1.　　B. 0.　　C. 1.　　D. 2.　　【　】

7. 在下列各点中，哪个点为函数 $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ 的极大值点.

A. $(1,0)$.　　B. $(0,-1)$.

C. $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},-\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$.　　D. $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$.　　【　】

二、填空题

1. 设 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数，则 $f'_x(0,1,-1)=$ ______.

2. 设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f,g 均可微，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ______.

3. 设函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定，其中函数 $g(y)$ 可微，且 $g(y)\neq 0$，则 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$ ______.

4. 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=$ ______.

5. 设 $z=e^{-x}-f(x-2y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ______.

6. 椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面方程为 ______.

三、计算题

1. 设 $z=f(u,x,y)$，$u=xe^y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

3. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^z-xz=0$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

4. 已知 $z=u^v$，$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\mathrm{d}z$.

5. 求曲线 $P:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

6. 求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

参　考　答　案

一、1. B　2. D　3. A　4. D　5. B　6. C　7. C

二、1. $f'_x(0,1,-1)=1$.

2. $\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+\frac{1}{y}f'_2-\frac{y}{x^2}g'$.

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=-\frac{g'(v)}{g^2(v)}$.

4. $2\mathrm{e}\mathrm{d}x+(\mathrm{e}+2)\mathrm{d}y$.

5. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2(x-2y)-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{2y-x}$.

6. $2x+3y+z-6=0$.

三、1. $x\mathrm{e}^{2y}f''_{uu}+\mathrm{e}^{y}f''_{uy}+\mathrm{e}^{y}f'_{u}+x\mathrm{e}^{y}f''_{xu}+f''_{xy}$.

2. $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$.

3. $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{y^2}{1-xy}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{z}{xz-x}\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

4. $\mathrm{d}z=\dfrac{u^v}{x^2+y^2}\left[\left(\dfrac{xv}{u}-y\ln u\right)\mathrm{d}x+\left(\dfrac{yv}{u}+x\ln u\right)\mathrm{d}y\right]$.

5. 切线方程为$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$；法平面方程为 $x-z=0$.

6. $z=f(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 内的最大值为 3，最小值为 -2.